10 класс, ВАРИАНТ 9

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

   Ответ: -1.

   Решение. Числа a, b, c образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$. При этом оказывается, что дискриминант квадратного уравнения равен нулю, а четвёртый член прогрессии равен корню этого уравнения, т.е. $b_4 = -\frac{b}{a} = -\frac{qa}{a} = -q$, где q – знаменатель прогрессии. С другой стороны, $b_4 = aq^3$. Отсюда получаем значение третьего члена прогрессии: $b_3 = aq^2 = -1$.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

   Ответ: 99.

   Решение. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть его биссектриса AN и медиана BM пересекаются в точке O. В треугольнике ABM отрезок AO является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник равнобедренный, $AM = BM$.
   Обозначим $AB = y$, $y \in \mathbb{Z}$. Тогда $AM = MC = y$. По свойству биссектрисы $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, поэтому если $BN = x$, то $CN = 2x$. Сумма сторон треугольника равна периметру, т.е. $3(x+y) = 1200$, откуда $y = 400 - x$, поэтому $x \in \mathbb{Z}$. Учтём неравенство треугольника:

$$\begin{cases} 2y < y + 3x, \\ 3x < y + 2y, \\ y < 2y + 3x. \end{cases} \Leftrightarrow x < y < 3x.$$

   Так как $y = 400 - x$, то $x < 400 - x < 3x \Leftrightarrow 100 < x < 200$. На этом интервале содержится 99 целых значений x.

   Покажем, что никакая неупорядоченная тройка длин сторон треугольника $(a; b; c)$ не была посчитана более одного раза. Из двойного неравенства $x < y < 3x$ заключаем, что из сторон треугольника y, $2y$ и $3x$ сторона y – наименьшая. Тогда по заданному значению y вся тройка $(a; b; c)$ восстанавливается однозначно: наименьшее из этих чисел равно y, ещё одно равно $2y$, а третье равно $p - y - 2y$ (где p – периметр). Поэтому две различные неупорядоченные тройки длин сторон задаются различными значениями y.

3. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$

   Ответ: $(0; 1)$, $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}; 2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$.

   Решение. Первое уравнение при условии $y - 2x \geqslant 0$ равносильно уравнению $(y - 2x)^2 = xy - 2x - y + 2$, откуда $y^2 + (1 - 5x)y + (4x^2 + 2x - 2) = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно переменной x, имеем $D = (1 - 5x)^2 - 4\left(4x^2 + 2x - 2\right) = (3x - 3)^2$; $y = 4x - 2$ или $y = x + 1$. Подставляем во второе уравнение исходной системы.

   Если $y = 4x - 2$, то $6x^2 - 12x + 5 = 0$, и получаем две пары $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}$, $y = 2 + \frac{4}{\sqrt{6}}$ и $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{6}}$, $y = 2 - \frac{4}{\sqrt{6}}$.
   Если $y = x + 1$, то $3x^2 - 6x = 0$, откуда также имеем две пары $x = 0$, $y = 1$ и $x = 2$, $y = 3$.

   Из четырёх найденных пар чисел неравенству $x \geqslant 2y$ удовлетворяют только две из них: $(0; 1)$, $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}; 2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$.

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

   Ответ: $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2}{5}$; $S_{\triangle CDE} = \frac{6}{5}$.

   Решение. Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle CDE = \angle BAC + \angle AED = 90^\circ + \alpha$, $\angle DCE = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) - 45^\circ = 45^\circ - \alpha$. Пусть $AD = 3x$. Отсюда $AC = 5x$, $CD = 2x$, $DE = AD\sin\alpha = 3x\sin\alpha$. По теореме синусов для треугольника CDE имеем $\frac{2x}{\sin 45^\circ} = \frac{3x\sin\alpha}{\sin(45^\circ-\alpha)}$. Следовательно, $3\sin\alpha\sin 45^\circ = 2\sin(45^\circ - \alpha)$; $\frac{3}{\sqrt{2}}\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}}(\cos\alpha - \sin\alpha)$; $5\sin\alpha = 2\cos\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$.

   Площадь треугольника CDE равна $\frac{1}{2}\cdot DC\cdot DE\cdot\sin\angle CDE = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 3x\sin\alpha\cdot\sin(90^\circ+\alpha) = \frac{3}{2}x^2\sin 2\alpha = \frac{3x^2}{2}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3}{2}\cdot\frac{29}{25}\cdot\frac{4/5}{1+4/25} = \frac{6}{5}$.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

   Ответ: $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.

   Решение. Обозначим $\angle ABC = \psi$, а радиусы Ω и ω через R и r соответственно. Пусть O и Q – центры окружностей Ω и ω соответственно; K – точка пересечения ω и AB, отличная от A.

   Отметим, что $\angle BDQ = 90^\circ$ (касательная BD перпендикулярна радиусу DQ) и $\angle BCA = 90^\circ$ (угол вписан в окружность Ω и опирается на её диаметр). Значит, треугольники BDQ и BCA подобны (по двум углам). Отсюда $\frac{BD}{BQ} = \frac{BC}{BA}$, т.е. $\frac{3}{2R-r} = \frac{4}{2R}$, а значит, $R = 2r$. По теореме о касательной и секущей $BD^2 = BK\cdot BA = (2R-2r)\cdot 2R = 8r^2$. Следовательно, $BD = 2r\sqrt{2}$, $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $R = 2r = \frac{3}{\sqrt{2}}$.
   Далее находим углы: $\angle BQD = 90^\circ - \angle QBD = 90^\circ - \psi$; $\angle AQD = 180^\circ - \angle BQD = 90^\circ + \psi$; $\angle QDA = \angle QAD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AQD) = 45^\circ - \frac{\psi}{2}$; Следовательно, $\angle BDE = 180^\circ - \angle BDQ - \angle ADQ = 180^\circ - 90^\circ - \left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\psi}{2}$.

   Перейдём к нахождению площади. Она равна половине произведения диагоналей, умноженной на синус угла между ними, т.е. $\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AE\cdot\sin\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2R\cos\psi 2R\cos\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right)\sin\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right) = R^2\cos\psi\cdot(\sin 90^\circ + \sin\psi)$. Поскольку $\sin\psi = \frac{DQ}{BQ} = \frac{r}{2R-r} = \frac{1}{3}$, $\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, то окончательно $S = \frac{9}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right) = 4\sqrt{2}$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

   $$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x-1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

   Ответ: $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$.

   Решение. Рассмотрим первое неравенство. Обозначим $h(x) = 2x^2 - x - 1$. График – парабола с ветвями вверх. На концах данного в условии промежутка имеем $h\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{8}$, $h\left(\frac{3}{2}\right) = 2$. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$ и $N\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ могут располагаться на прямой $y = ax + b$ или ниже неё. Отсюда самое "низкое" расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN. Составляя её уравнение по двум точкам, имеем $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ (назовём эту прямую ℓ).

График правой части неравенства – “уголок” $g(x)=x+|2x-1|$ с вершиной в точке $P\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ и ветвями, направленными вверх. Заметим, что точка P лежит на прямой ℓ, поэтому любая прямая, расположенная выше ℓ, пересекает график $y=g(x)$ на рассматриваемом промежутке, и правая часть неравенства выполняется не при всех x.

Итак, ℓ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 21$, $1\leqslant y\leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

Ответ: 182.

Решение. Подставляя $a=1$ в равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, получаем $f(b)=f(1)+f(b)$, значит, $f(1)=0$. Если же для произвольных натуральных x, y положить $a=\frac{x}{y}$, $b=y$, то получаем $f(x)=f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$, откуда $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$. Таким образом, чтобы вычислить значение функции f в произвольной положительной рациональной точке нам достаточно значения функции f для любого натурального числа.

Для простых чисел и единицы значения функции мы уже знаем. Для составных чисел значения функции могут быть найдены, если их разложить на простые множители и воспользоваться равенством $f(ab)=f(a)+f(b)$, например, $f(15)=f(3\cdot 5)=f(3)+f(5)=\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{5}{2}\right]=1+2=3$. Аналогичным образом вычисляем значения функции для $n\in[1;21]$ и записываем их в таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(n)$	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
$f(n)$	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4	

Поскольку $f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)=f(1)=0$, то из $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ следует, что $f\left(\frac{y}{x}\right)>0$. Таким образом, количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ совпадает с количеством пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right)>0$. Посчитаем количество пар $(x;y)$, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$. Ввиду того, что $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$, нужно найти количество пар $(x;y)$ из таблицы выше, для которых $f(x)=f(y)$. Рассмотрим несколько случаев:

- $x=y$. В данном случае имеется 21 вариант.
- $x\neq y$, а $f(x)=f(y)=1$. В таблице есть 2 аргумента, при которых $f=1$. Выбирая пару таких аргументов, первый можно выбрать 2 способами, а второй – 1 способом. Значит, количество пар такого типа равно $2\cdot 1=2$.
- $x\neq y$, а $f(x)=f(y)=2$. Аналогично предыдущему пункту получаем $4\cdot 3=12$ пар.
- $x\neq y$, а $f(x)=f(y)=3$. Здесь $6\cdot 5=30$ пар.
- $x\neq y$, а $f(x)=f(y)=4$. Здесь $4\cdot 3=12$ пар.

Итого, есть $21+2+12+30+12=77$ пар натуральных чисел $(x;y)$, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$. Всего имеется $21^2=441$ пара, поэтому тех, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, ровно $\frac{441-77}{2}=182$.

10 класс, ВАРИАНТ 10

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

   Ответ: 1.

   Решение. Числа a, b, c образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$. При этом оказывается, что дискриминант квадратного уравнения равен нулю, а четвёртый член прогрессии равен корню этого уравнения, т.е. $b_4 = \frac{b}{a} = \frac{qa}{a} = q$, где q – знаменатель прогрессии. С другой стороны, $b_4 = aq^3$. Отсюда получаем значение третьего члена прогрессии: $b_3 = aq^2 = 1$.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

   Ответ: 74.

   Решение. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть его биссектриса AN и медиана BM пересекаются в точке O. В треугольнике ABM отрезок AO является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник равнобедренный, $AM = BM$.
   Обозначим $AB = y$. Тогда $AM = MC = y$, $y \in \mathbb{Z}$. По свойству биссектрисы $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, поэтому если $BN = x$, то $CN = 2x$. Сумма сторон треугольника равна периметру, т.е. $3(x+y) = 900$, откуда $y = 300 - x$, поэтому $x \in \mathbb{Z}$.. Учтём неравенство треугольника:

$$\begin{cases} 2y < y + 3x, \\ 3x < y + 2y, \\ y < 2y + 3x. \end{cases} \Leftrightarrow x < y < 3x.$$

   Так как $y = 300 - x$, то $x < 300 - x < 3x \Leftrightarrow 75 < x < 150$. На этом интервале содержится 74 целых значения x.

   Покажем, что никакая неупорядоченная тройка длин сторон треугольника $(a; b; c)$ не была посчитана более одного раза. Из двойного неравенства $x < y < 3x$ заключаем, что из сторон треугольника y, $2y$ и $3x$ сторона y – наименьшая. Тогда по заданному значению y вся тройка $(a; b; c)$ восстанавливается однозначно: наименьшее из этих чисел равно y, ещё одно равно $2y$, а третье равно $p - y - 2y$ (где p – периметр). Поэтому две различные неупорядоченные тройки длин сторон задаются различными значениями y.

3. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$

   Ответ: $\left(6 + \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}; 1 + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}\right)$, $(2; 0)$.

   Решение. Первое уравнение при условии $x - 6y \geqslant 0$ равносильно уравнению $(x - 6y)^2 = xy - 6y - x + 6$, откуда $x^2 + (1 - 13y)x + (36y^2 + 6y - 6) = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно переменной x, имеем $D = (1 - 13y)^2 - 4\left(36y^2 + 6y - 6\right) = (5y - 5)^2$; $x = 9y - 3$ или $x = 4y + 2$. Подставляем во второе уравнение исходной системы.

   Если $x = 9y - 3$, то $83y^2 - 166y + 65 = 0$, и получаем две пары $y = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$, $x = 6 + \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$ и $x = 6 - \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$, $y = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$.
   Если $x = 4y + 2$, то $18y^2 - 36y = 0$, откуда также имеем две пары $y = 0$, $x = 2$ и $y = 2$, $x = 10$.

   Из четырёх найденных пар чисел неравенству $x \geqslant 6y$ удовлетворяют только две из них: $\left(6 + \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}; 1 + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}\right)$, $(2; 0)$.

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

   Ответ: $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $S_{\triangle CDE} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

   Решение. Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle CDE = \angle BAC + \angle AED = 90^\circ + \alpha$, $\angle DCE = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) - 30^\circ = 60^\circ - \alpha$. Пусть $AD = x$. Отсюда $AC = 3x$, $CD = 2x$, $DE = AD\sin\alpha = x\sin\alpha$. По теореме синусов для треугольника CDE имеем $\frac{2x}{\sin 30^\circ} = \frac{x\sin\alpha}{\sin(60^\circ-\alpha)}$. Следовательно, $\sin\alpha\sin 30^\circ = 2\sin(60^\circ - \alpha)$; $\frac{1}{2}\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$; $3\sin\alpha = 2\sqrt{3}\cos\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

   Площадь треугольника CDE равна $\frac{1}{2}\cdot DC\cdot DE\cdot\sin\angle CDE = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot x\sin\alpha\cdot\sin(90^\circ + \alpha) = \frac{1}{2}x^2\sin 2\alpha = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{7}{9}\cdot\frac{2/\sqrt{3}}{1+4/3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

   Ответ: $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $r = \frac{6}{\sqrt{5}}$, $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

   Решение. Обозначим $\angle ABC = \psi$, а радиусы Ω и ω через R и r соответственно. Пусть O и Q – центры окружностей Ω и ω соответственно; K – точка пересечения ω и AB, отличная от A.

   Отметим, что $\angle BDQ = 90^\circ$ (касательная BD перпендикулярна радиусу DQ) и $\angle BCA = 90^\circ$ (угол вписан в окружность Ω и опирается на её диаметр). Значит, треугольники BDQ и BCA подобны (по двум углам). Отсюда $\frac{BD}{BQ} = \frac{BC}{BA}$, т.е. $\frac{3}{2R-r} = \frac{5}{2R}$, а значит, $R = \frac{5r}{4}$. По теореме о касательной и секущей $BD^2 = BK\cdot BA = (2R - 2r)\cdot 2R = \frac{5r^2}{4}$. Следовательно, $BD = \frac{r\sqrt{5}}{2}$, $r = \frac{6}{\sqrt{5}}$, $R = \frac{5r}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

   Далее находим углы: $\angle BQD = 90^\circ - \angle QBD = 90^\circ - \psi$; $\angle AQD = 180^\circ - \angle BQD = 90^\circ + \psi$; $\angle QDA = \angle QAD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AQD) = 45^\circ - \frac{\psi}{2}$; Следовательно, $\angle BDE = 180^\circ - \angle BDQ - \angle ADQ = 180^\circ - 90^\circ - \left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\psi}{2}$.

   Перейдём к нахождению площади. Она равна половине произведения диагоналей, умноженной на синус угла между ними, т.е. $\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AE\cdot\sin\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2R\cos\psi 2R\cos\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right)\sin\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right) = R^2\cos\psi\cdot(\sin 90^\circ + \sin\psi)$. Поскольку $\sin\psi = \frac{DQ}{BQ} = \frac{r}{2R-r} = \frac{2}{3}$, $\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, то окончательно $S = \frac{45}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство $8x - 6|2x-1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$ выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

   Ответ: $a = 2$, $b = 3$.

   Решение. Рассмотрим второе неравенство. Обозначим $h(x) = -8x^2 + 6x + 7$. График – парабола с ветвями вниз. На концах данного в условии промежутка имеем $h\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$, $h(1) = 5$. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ и $N(1; 5)$ могут располагаться на прямой $y = ax + b$ или выше неё. Отсюда самое “высокое” расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN. Составляя её уравнение по двум точкам, имеем $y = 2x + 3$ (назовём эту прямую ℓ).

   График левой части неравенства – “уголок” $g(x) = 8x - 6|2x - 1|$ с вершиной в точке $P\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ и ветвями, направленными вниз. Заметим, что точка P лежит на прямой ℓ, поэтому любая прямая, расположенная ниже ℓ, пересекает график $y = g(x)$ на рассматриваемом промежутке, и левая часть неравенства выполняется не при всех x.

Итак, ℓ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = 2$, $b = 3$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

Ответ: 181.

Решение. Подставляя $a = 1$ в равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, получаем $f(b) = f(1) + f(b)$, значит, $f(1) = 0$. Если же для произвольных натуральных x, y положить $a = \frac{x}{y}$, $b = y$, то получаем $f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$, откуда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Таким образом, чтобы вычислить значение функции f в произвольной положительной рациональной точке нам достаточно значения функции f для любого натурального числа.

Для простых чисел и единицы значения функции мы уже знаем. Для составных чисел значения функции могут быть найдены, если их разложить на простые множители и воспользоваться равенством $f(ab) = f(a) + f(b)$, например, $f(15) = f(3 \cdot 5) = f(3) + f(5) = \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{5}{2}\right] = 1 + 2 = 3$. Аналогичным образом вычисляем значения функции для $n \in [2; 22]$ и записываем их в таблицу:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$f(n)$	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$f(n)$	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4	6

Поскольку $f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = f(1) = 0$, то из $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ следует, что $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$. Таким образом, количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ совпадает с количеством пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$. Посчитаем количество пар $(x; y)$, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Ввиду того, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, нужно найти количество пар $(x; y)$ из таблицы выше, для которых $f(x) = f(y)$. Рассмотрим несколько случаев:

- $x = y$. В данном случае имеется 21 вариант.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 1$. В таблице есть 2 аргумента, при которых $f = 1$. Выбирая пару таких аргументов, первый можно выбрать 2 способами, а второй – 1 способом. Значит, количество пар такого типа равно $2 \cdot 1 = 2$.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 2$. Аналогично предыдущему пункту получаем $4 \cdot 3 = 12$ пар.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 3$. Здесь $6 \cdot 5 = 30$ пар.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 4$. Здесь $4 \cdot 3 = 12$ пар.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 6$. Здесь $2 \cdot 1 = 2$ пары.

Итого, есть $21 + 2 + 12 + 30 + 12 + 2 = 79$ пар натуральных чисел $(x; y)$, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Всего имеется $21^2 = 441$ пара, поэтому тех, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, ровно $\frac{441-79}{2} = 181$.

